Volume 13 Juillet 1934 Numéro 151

L'ONDE ÉLECTRIQUE

RADIOÉLECTRICITÉ ET SES APPLICATIONS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES

BULLETIN DE LA
SOCIÉTÉ DES RADIOÉLECTRICIENS

Quelques observations sur la propagation, pendant l'Année Polaire, au Scoresby Sund, par le Lieutenant de vaisseau DOUGUET.

Représentation nouvelle des propriétés de deux circuits couplés, par R. MESNY.

Société des Radioélectriciens.

Analyses.

ÉTIENNE CHIRON, Éditeur, 40, rue de Seine, PARIS (VI^e^)

La Rédaction décline toute responsabilité en ce qui concerne la teneur des articles publiés, les auteurs assumant l'entière responsabilité de ce qui paraît sous leur signature.

L'ONDE ÉLECTRIQUE

Revue mensuelle publiée par la Société des Radioélectriciens

(Ancienne Société des Amis de la T. S. F.)

ABONNEMENT D'UN AN		Etienne CHIRON	PRIX
France..... 60 fr.		ÉDITEUR	DU NUMÉRO : 6 fr
Etranger	tarif faible. 70 fr.	40, rue de Seine-PARIS	Tél. : DANTON 47-5
	tarif fort.. 80 fr.	CHÈQUES POSTAUX : PARIS 53-35	

SOCIÉTÉ DES RADIOELECTRICIENS

Adresser la correspondance administrative et technique au

Secrétariat de la S. R. E.

14, avenue Pierre-Larousse

Malakoff (Seine)

Paiement des cotisations à

M. COLMANT, trésorier

4, rue Alfred, Clamart (Seine)

Compte de chèques postaux n° 697-38

Les correspondants sont priés de rappeler chaque fois le numéro d'inscription porté sur leur carte.

CHANGEMENTS D'ADRESSE : Joindre 2 francs par revue à toute demande.

EXTRAIT DES STATUTS

ARTICLE PREMIER. — La Société des Radioélectriciens a pour but :

1° De contribuer à l'avancement de la radiotélégraphie théorique et appliquée ainsi qu'à celui des sciences et industries qui s'y rattachent :

2° D'établir et d'entretenir entre ses membres des relations suivies et des liens de solidarité.

. . . . . .

Elle tient des réunions destinées à l'exposition et à la discussion des questions concernant la radiotélégraphie et tout ce qui s'y rattache.

. . . . . .

Elle s'interdit toute ingérence dans les entreprises industrielles ou commerciales quelconques, autres que celles qui concernent son administration propre.

. . . . . .

ART. 2. — La Société se compose de membres titulaires, — dont certains en qualité de membres bienfaiteurs ou de membres donateurs, — et de membres d'honneur.

Pour devenir membre titulaire de la Société, il faut :

1° Adresser au président une demande écrite appuyée par un membre de la Société;

2° Être agréé par le Bureau de la Société.

. . . . . .

Tout membre titulaire qui aura pris l'engagement de verser pendant cinq années consécutives une subvention annuelle d'au moins 1.000 francs pour favoriser les études et publications scientifiques ou techniques entreprises par la Société recevra le titre de membre bienfaiteur.

Ceux qui, parmi les membres titulaires, auront fait don à la Société, en dehors de leur cotisation d'une somme de 300 francs au moins, seront inscrits en qualité de donateurs.

. . . . . .

Les membres titulaires reçoivent une publication périodique ayant un caractère technique.

Cette publication leur est adressée gratuitement.

Toutefois les membres résidant à l'étranger doivent verser en sus de leur cotisation annuelle une somme destinée à couvrir le supplément de frais postaux, somme qui sera déterminée par le Bureau.

. . . . . .

MONTANTS DES COTISATIONS

Les cotisations annuelles sont ainsi fixées :

Particuliers . . . . . 50 fr.

Sociétés ou collectivités. . . . . 200 fr.

Les cotisations peuvent être rachetées moyennant le paiement immédiat de quinze annuités.

La cotisation des membres titulaires âgés de moins de 21 ans, en cours d'études ou de préparation professionnelle, peut sur demande être ramenée à 30 francs.

Les membres résidant à l'étranger doivent verser en plus pour couvrir le supplément de frais postaux la somme de 15 fr.

Cette somme sera diminuée de moitié si le pays de leur résidence a adhéré à la Convention de Stockholm (se renseigner à la Poste).

L'envoi de la carte de membre tient lieu de reçu de la somme envoyée. En cas de non admission d'un candidat, la somme versée lui est retournée.

QUELQUES OBSERVATIONS SUR LA PROPAGATION, PENDANT L'ANNÉE POLAIRE, AU SCORESBY SUND[1]

par le Lieutenant de vaisseau DOUGUET
Membre de la Mission Polaire.

L'année 1932-1933 fut choisie par une commission composée de savants des diverses nations, pour être une année de recherches et d'observations sur toute la surface du globe, commémorant, à cinquante ans de distance, une entreprise analogue réalisée en 1882-1883.

Elle fut dite « polaire » parce que la précédente avait été ainsi appelée et qu'une activité scientifique inaccoutumée devait régner dans les régions de haute latitude. En fait, ce que les quelques missions disséminées sur la calotte polaire arctique — car malheureusement il n'y eut aucune observation dans l'antarctique — rapportent de leur année de travail ne représente qu'une infime contribution aux travaux simultanés des laboratoires des pays civilisés. Leur situation privilégiée, au point de vue solaire, donne toutefois aux résultats de leurs recherches une importance particulière.

Le programme était un programme géophysique; le but, la connaissance du globe, et, plus précisément, la surface du globe étant maintenant entièrement connue :

l'étude des champs de force qui l'entourent, magnétique, électrique, et de leurs manifestations terrestres (courants telluriques);

l'étude de la basse atmosphère par les procédés dont dispose la météorologie;

l'étude de la haute atmosphère par l'examen des seuls phénomènes directement observables qui s'y manifestent, les aurores polaires,

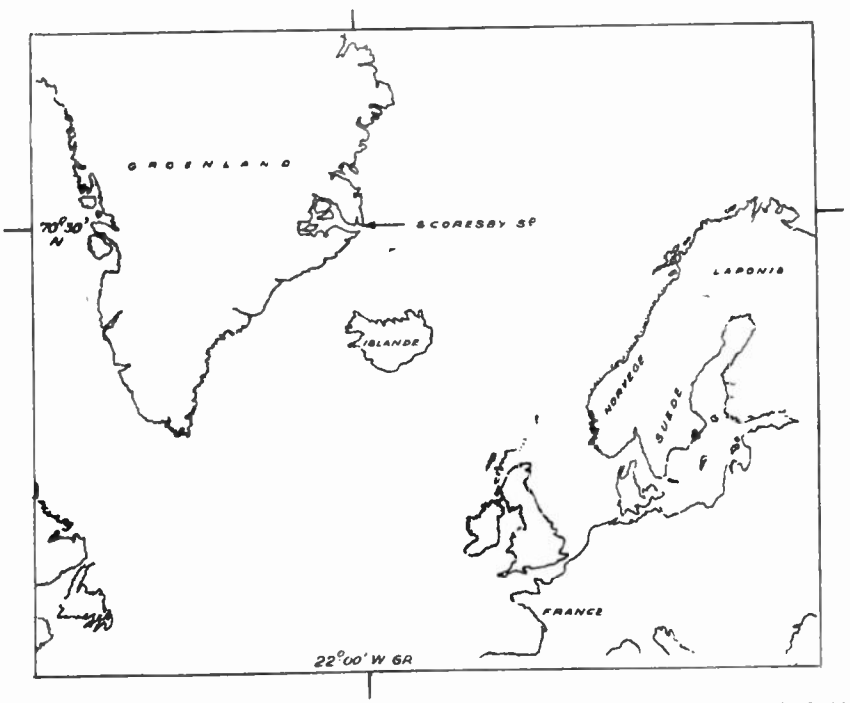
1. Communication faite à la séance mensuelle de la Société des Radioélectriciens, le 16 avril 1934.

et par les procédés d'investigation qu'offre la radioélectricité;

la liaison de tous les résultats sous l'égide du soleil, dispensateur, dans notre univers, de toute énergie;

et, un peu en marge de cet ensemble géophysique, l'étude des rayons cosmiques.

La France détacha à l'extérieur trois missions. Celle dont je faisais partie séjourna, sous le commandement du lieutenant de vaisseau Habert, sur la côte est du Groenland de juillet 1932 à août 1933, par 70° 29 de latitude Nord et 21° 58 de longitude Ouest, à l'entrée du plus grand fjord du monde, le Scoresby Sund.



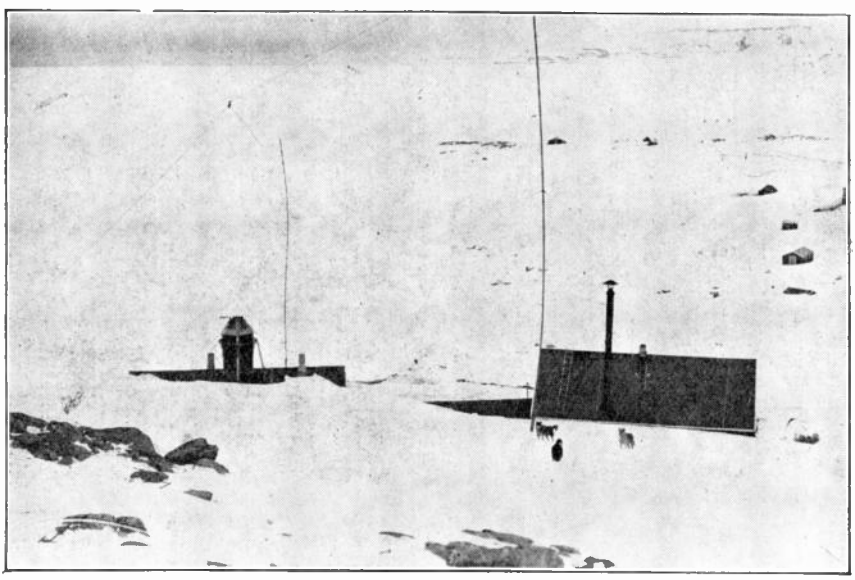
Point d'hivernage de la Mission française de l'Année polaire internationale 1932-1933. Les repères dans les marges en marquent le parallèle et le méridien

Nous avions un programme de travaux étendu, dans le cadre que je vous esquissais tout à l'heure, et emportions, pour sa réalisation, un matériel important — 250 tonnes — dont le transport nécessita le concours du mouilleur de mines, ancien brise-glace, *Pollux* et dont la mise à pied d'œuvre et le montage devaient nous prendre plusieurs semaines après le départ des bateaux.

Nous trouvâmes une maison près du rivage, à 35 mètres d'altitude, sur une petite plate-forme rocheuse d'accès malaisé.

Le *Pollux* dans les glaces.

Nous dûmes plus que doubler cette installation, qui eût à peine suffi à nous loger en touristes.



Station principale : Mâts, antennes de T. S. F.

La base de nos travaux était évidemment l'installation électrique, qui comprenait :

un groupe électrogène de 8 kW, moteur semi-diesel Renault et dynamo entraînée par courroie;

un petit groupe de secours;

une batterie d'accumulateurs de 90 éléments de 210 ampères-heure, que nous utilisions à toutes fins. Dans ce but, chaque groupe de quatre volts était relié à un tableau qui nous permettait d'effectuer aisément toute permutation et groupement désirables.

Soixante éléments constituaient la batterie de service.

Station principale : Poste de T. S. F.

Les trente autres étaient affectés à la T. S. F., au magnétisme, aux courants telluriques,... avec un roulement plus ou moins régulier suivant l'état des accumulateurs.

Le « secteur » de 120 volts devait assurer :

l'éclairage, l'alimentation du convertisseur de 4 kW du poste émetteur de T.S.F. et celle de quelques petits moteurs, ventilateurs et pompes, et éventuellement du treuil de cerf-volant, la charge des petits accumulateurs.

La partie radioélectrique de notre programme concernait l'étude de la propagation, se rattachant à la connaissance de la haute atmosphère, et comprenait :

la mesure de hauteur des couches ionisées par la méthode des échos;

l'écoute régulière et des mesures de champ d'émissions faites en France et à l'étranger;

l'enregistrement des parasites atmosphériques avec les appareils du commandant Bureau.

Mesure de hauteur des couches ionisées. — Cette expérience nécessitait le montage, à quelque distance de notre station, d'un oscillographe Blondel. L'endroit prévu était notre observatoire

Le lieutenant de vaisseau Bouguet (à gauche), chargé des recherches de radioélectricité, surveille la préparation d'un radio-sondage.

météorologique secondaire, placé à cinq kilomètres dans l'intérieur des terres, sur une croupe de 420 mètres. Nous trouvâmes sur place un petit abri de montagne tout à fait insuffisant et, les plus gros travaux terminés à la station principale, nous construisîmes une petite maison qui, presque terminée, fut jetée à bas à la mi-novembre au cours d'une tempête. Elle fut remontée et définitivement terminée à la fin de janvier. L'installation électrique (moteur électrogène et batterie d'accumulateurs destinés à l'alimentation de l'oscillographe) fut prête au mois de mars. Nous voulûmes commencer les essais. Impossible d'enregistrer la réception, brouillée par le convertisseur.

Nous fîmes les tentatives les plus diverses pour pallier cet inconvénient : capacités, cage en cuivre entièrement soudée, dans

laquelle fut enfermé le convertisseur, les câbles d'alimentation sous tubes..... Rien n'y fit, et nous fûmes obligés de décider sa suppression et l'alimentation directe de l'arc par des accumulateurs, qui furent prélevés sur la batterie de la station principale. Le temps était donné par un petit convertisseur, qui ne brouillait pas, mais qui n'était malheureusement pas assez fort pour entraîner le moteur de déroulement du papier. Le papier fut déroulé à la main moyennant une multiplication appropriée.

Cela nous conduisit à la fin de mai, et, dans les premiers jours de juin, nous commençâmes nos émissions de tops brefs.

L'émetteur était un montage Ditte-Hartley ordinaire, utilisant les groupes et la lampe de 800 W de notre poste de trafic, un F.C. 50, type marine, de la S. F. R. Les tops brefs étaient obtenus, soit en faisant s'amorcer des oscillations de relaxation dans le circuit de grille, soit en y transmettant celles d'un relaxateur à lampe au néon.

Nous fîmes ainsi, trois fois par jour, jusqu'à la fin de juillet, des émissions de tops sur 63 mètres environ, avec différents réglages, sans obtenir un seul écho, quoique nos tops nous parussent brefs et forts.

Inquiets de ces résultats, nous remontâmes, au retour, notre installation au Laboratoire National de Radioélectricité et enregistrâmes des échos.

Il semble donc qu'à l'époque pendant laquelle nous avons opéré, qui était le jour polaire, il n'y ait pas d'écho sur cette fréquence.

Réceptions; Variation annuelle. — A partir de la fin de janvier, nous pûmes assurer notre service d'écoutes et faire quelques mesures de champ.

Des émissions journalières à heure fixe de FYB (Pontoise), FLE (Tour Eiffel), FYD (Pontoise), FLJ (Fort d'Issy), GBR (Rugby), JAN (Tokio) devaient permettre d'étudier la variation annuelle, suivant un programme établi par le commandant Bureau.

L'examen de la variation annuelle de l'activité solaire (caractérisée par le nombre de Wolff) au cours de l'année polaire montre, pendant les mois d'hiver, la périodicité bien connue de 27 jours qui, à partir du mois de mai, cesse d'être apparente.

Les courbes de variation de l'activité aurorale et magnétique présentent le même caractère, la périodicité de 27 jours, apparente de

décembre à avril, disparaît ensuite. Ces courbes sont en phase, l'activité magnétique étant maximum en même temps que l'activité auro-

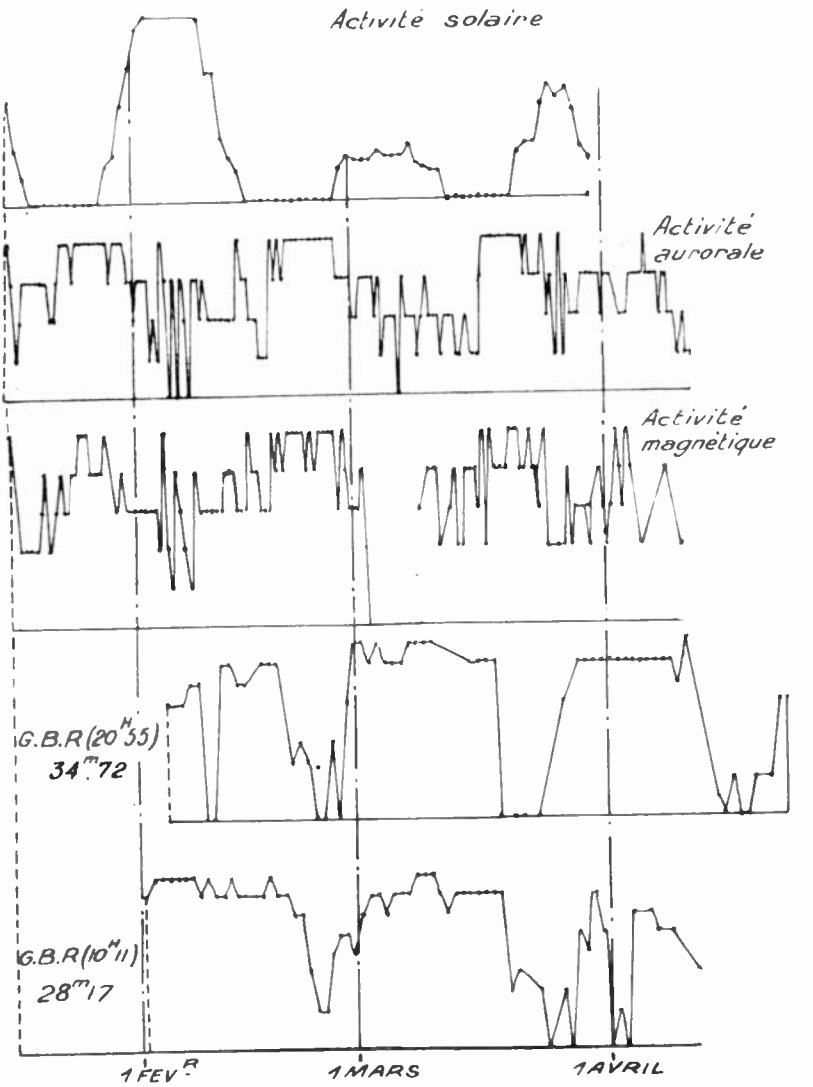


Fig. 1.

rale, mais sont déphasées par rapport à l'activité solaire d'une demi-période environ, ces maxima se produisant lorsque le nombre de Wolff est nul, c'est-à-dire quand les taches sont à l'opposé de la terre.

Ce déphasage remet en question les trajectoires des électrons issus

de ces taches, et l'explication des aurores polaires naguère proposée demande, de ce fait, une courbure très forte de ces trajectoires dans le champ magnétique solaire.

L'intensité de réception des diverses émissions est en opposition de phase avec l'activité magnétique et aurorale (fig. 1).

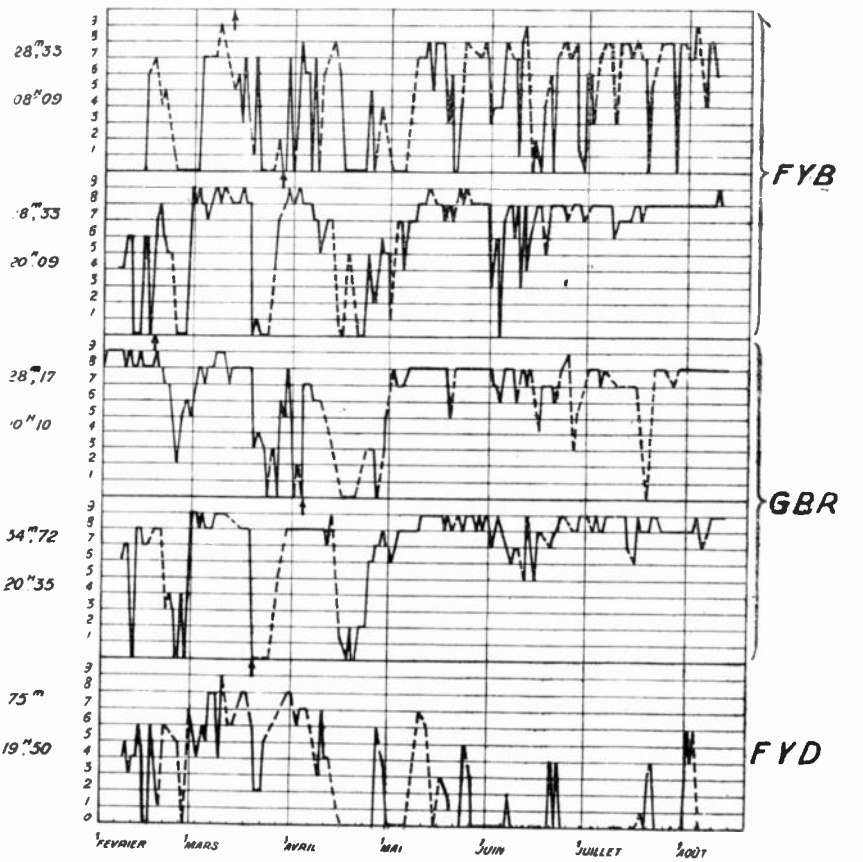


Fig. 2.

La périodicité de 27 jours apparaît nettement dans la variation jusqu'en avril; à partir de mai, il n'y a plus d'aurores observables, l'activité magnétique ne montre plus de fluctuation régulière et l'intensité de réception suit, en gros. A la mi-mai, une recrudescence d'agitation, puis dans la première moitié de juin, avec accalmie entre le 3 et le 8, à sa correspondance sur les courbes de réception (fig. 2).

Il apparaît, en outre, sur ces courbes, que les ondes de 28 m 33

à 8 h 09 et à 20 h 09 de FYB et les ondes de 28 m 17, à 10 h 11, et de 34 m 72, à 20 h 35, de GBR passent bien, tandis que l'onde de 75 m de FYD à 19 h 50 ne passe guère.

C'est là de la propagation de jour.

Le lieutenant Martin a établi à Paris des courbes analogues pour toutes les écoutes de l'émission de 20 h 09 de FYB faites par différents postes en relation avec l'O.N.M. Il n'est possible de retrouver la périodicité de 27 jours que sur les écoutes de Tallinn, poste esthonien situé aux environs du cercle polaire.

Dans notre trafic avec le poste de la marine à Cherbourg, nous avons fait des constatations analogues ; la périodicité de 27 jours est apparente non seulement dans nos réceptions, mais également dans les réceptions par Cherbourg de nos émissions.

Les ondes utilisées étaient : 33-34 m à 11 h, qui passe assez mal pendant le jour polaire, et 55-61 m à 2 h, qui passe assez bien (trajet en grande partie nocturne).

Variation diurne. — Certains jours prévus, des émissions horaires étaient faites par les postes français, tantôt FYB, tantôt FLE et FLJ.

Des réceptions de FYB et de FLJ, qui seules donnèrent quelques résultats, la variation diurne apparaît toujours nette, avec maximum de jour, minimum de nuit avec disparition généralement complète, remontée au matin, minimum plus ou moins important entre 11 h et 12 h, ce qui expliquerait le fait que l'onde de 33-34 m passait mal vers cette heure-là.

Une courbe moyenne, déduite des observations de FYB et de FLJ des 6-12 avril, 3-10 mai, 1-7 juin, comparée à la courbe moyenne de la déclinaison déterminée dans les mêmes conditions, montre une correspondance nette avec, semble-t-il, un retard de la déclinaison sur l'intensité de réception (fig. 3).

Pendant le jour polaire, la variation diurne est plus fantaisiste, avec cependant un minimum nocturne net.

Pendant les périodes de jours normaux, les heures du lever et du coucher du soleil ne semblent pas marquer aussi nettement que dans nos régions, des changements d'allure de la variation.

Ainsi :

le 8-9 mars, FYB disparaît trois heures après le coucher du soleil et reparaît deux heures avant son lever;

le 15-16 mars, FLJ disparaît plus de trois heures après le coucher du soleil et reparaît deux heures avant son lever;

le 6-7 avril, FLJ disparaît deux heures après le coucher du soleil et reparaît quatre heures après son lever;

le 12-13 avril, FYB disparaît plus de deux heures après le coucher et reparaît au lever;

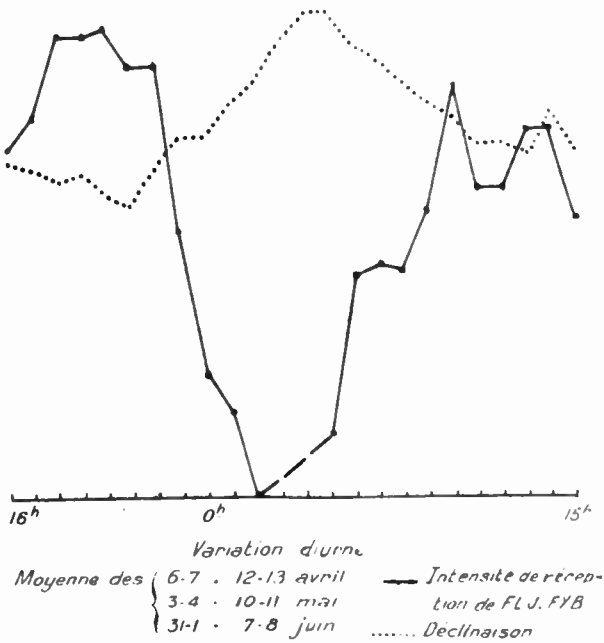


Fig. 3.

le 3-4 mai, FLJ disparaît deux heures avant le coucher du soleil et reparaît plus de quatre heures après le lever;

le 10-11 mai, FYB disparaît plus d'une heure après le coucher et reparaît trois heures après le lever.

Pendant le jour polaire la variation suit, en gros, celle de la déclinaison.

Atmosphériques. — Cette particularité de la place qu'occupent, dans la variation diurne des phénomènes, les heures du lever et du coucher du soleil, qui, dans nos régions, interviennent de façon plus précise, se retrouve dans les enregistrements d'atmosphériques.

Nos enregistreurs d'atmosphériques, à la description desquels je ne m'arrêterai pas, étaient placés dans un petit local séparé,

mais, dans notre maison en bois, étaient victimes de toutes les mauvaises plaisanteries de tous les appareils électriques à relais ou à collecteurs. La dynamo, en particulier, dont la commutation était loin d'être parfaite, gênait beaucoup, et bien des courbes sont inutilisables de ce fait.

Cependant, des quelques courbes convenables qui ont pu être enregistrées sur 12 kcs et 27 kcs, il ressort qu'il n'y avait pour ainsi dire pas d'atmosphériques locaux.

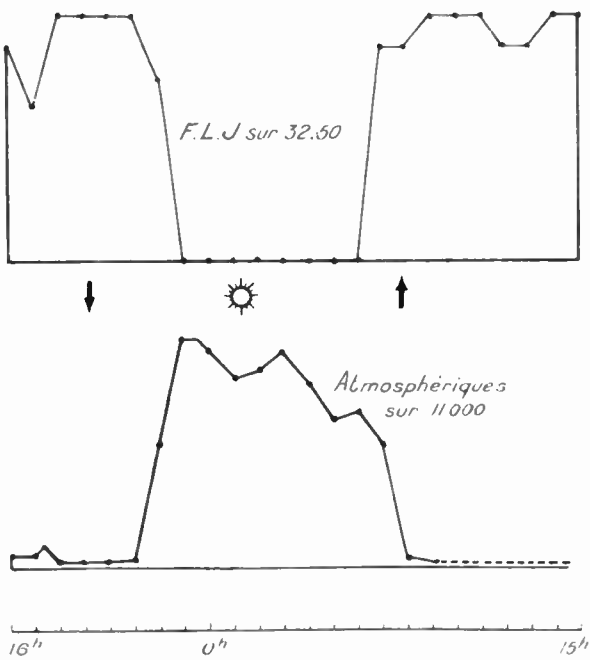


Fig. 1.

Il ne s'agit que d'atmosphériques lointains.

Pendant la nuit polaire, on remarque une variation diurne analogue à celle de nos régions : pour ainsi dire pas d'atmosphériques pendant les heures de jour et déclenchement des atmosphériques vers 21 h assez régulièrement, le retour au calme se faisant vers 9 h du matin.

Le fait que les parasites cessent vers 9 h du matin presque tous les jours, tend à faire supposer que la source la plus fréquente se trouve, en gros, par 3 h de longitude W, si on la suppose dans la zone équatoriale, ce qui correspond au Brésil.

Pendant le jour polaire, il n'y a presque pas d'atmosphériques, ils reprennent au début d'août.

Pendant la période de jours normaux, les atmosphériques ne commencent pas au coucher du soleil pour cesser à son lever; c'est à peine si, parfois, à ces moments, on peut constater une anomalie de la courbe, mais la variation semble suivre le même horaire que les ondes courtes.

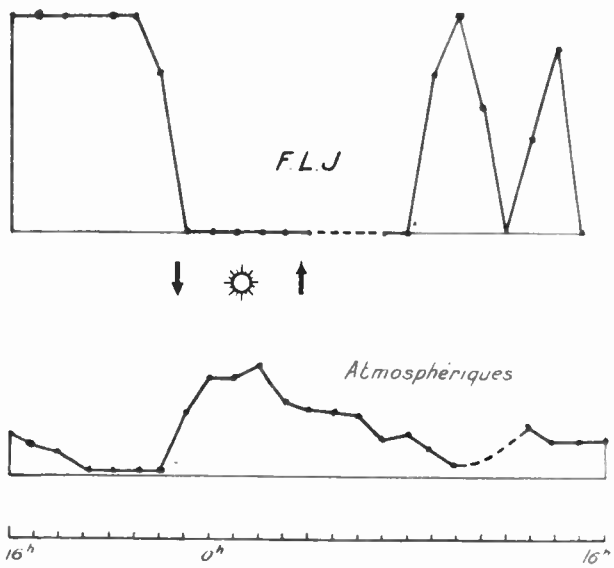


Fig. 5.

Par exemple, le 15 mars, les atmosphériques commencent entre 21 et 22 h, heure à laquelle disparaît l'émission de FLJ, alors que le soleil s'est couché vers 19 h. Les atmosphériques cessent entre 7 et 8 h, FLJ réapparaissant à 7 h, et le soleil se lève à 8 h (fig. 4).

Le 3 mai, les atmosphériques se déclenchent entre 22 et 23 h, au moment où FLJ disparaît. Le soleil se couche vers 22 h 45. Les atmophériques s'éteignent doucement entre 8 et 9 h; FLJ réapparaît vers 9 h; le soleil est levé depuis 2 h 45 (fig. 5).

Ces quelques résultats, brièvement exposés, doivent à leur caractère local de ne présenter qu'un intérêt tout à fait quelconque. Ce n'est qu'en venant prendre place parmi les innombrables résultats acquis simultanément au cours de l'Année Polaire, qu'ils pourront être de quelque utilité.

DOUGUET.

REPRÉSENTATION NOUVELLE DES PROPRIÉTÉS DE DEUX CIRCUITS COUPLÉS

par **René MESNY**
Professeur à l'École Supérieure d'Électricité.

SOMMAIRE

L'auteur étudie le fonctionnement de deux circuits couplés. Grâce à des notations convenablement choisies, il représente l'intensité secondaire par une surface dont l'examen permet d'apercevoir d'un coup d'œil les différentes allures de ses variations : il indique également la construction d'un diagramme plan, valable pour tous les cas, et sur lequel on peut déterminer graphiquement les valeurs numériques de l'intensité ou résoudre les problèmes posés par le couplage. Il montre enfin qu'en choisissant convenablement le couplage et les décréments des deux circuits, il est possible d'obtenir dans le secondaire une intensité restant sensiblement constante dans une gamme de fréquence étendue, tout en conservant un très bon rendement.

1. Équations du système. Intensité du courant secondaire. — Considérons les deux circuits de la figure 1, couplés par induction ma-

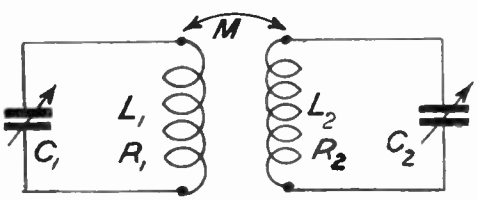


Fig. 1.

gnétique et dont le premier est excité par une force électromotrice d'amplitude E. En posant :

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = S$$

les équations du système sont, en notation complexe,

$$(1)\quad \begin{cases} (R_1 + jS_1)\mathfrak{I}_1 + jM\omega\mathfrak{I}_2 = E \\ jM\omega\mathfrak{I}_1 + (R_2 + jS_2)\mathfrak{I}_2 = 0. \end{cases}$$

Pour mettre l'expression du courant secondaire sous la forme la plus simple, nous adopterons les notations suivantes :

$$(2)\quad \begin{cases} \tau_1^2 = \dfrac{1}{L_1 C_1} \quad \tau_2^2 = \dfrac{1}{L_2 C_2} \quad d'_1 = \dfrac{R_1}{L_1 \omega} \quad d'_2 = \dfrac{R_2}{L_2 \omega} \\ \xi_1 = \dfrac{1}{d'_1} \dfrac{\tau_1^2 - \omega^2}{\omega^2} \quad \xi_2 = \dfrac{1}{d'_2} \dfrac{\tau_2^2 - \omega^2}{\omega^2}. \end{cases}$$

Ces notations ne sont pas seulement choisies en vue de la simplicité des formules, elles ramènent les données et les variables du problème à des éléments ayant un sens physique important dans la pratique courante. Sauf en des cas exceptionnels, les pulsations propres τ_i diffèrent peu de la pulsation d'excitation ω; $\dfrac{\tau_i - \omega}{\omega}$ vaut alors, au plus, quelques centièmes et d' est très voisin de la quantité $\dfrac{R}{L\tau_i}$ où figure la pulsation de résonance du circuit correspondant, et que nous désignerons par d; cette dernière quantité est d'ailleurs le quotient $\dfrac{\delta}{\pi}$ du décrément par π. On aura donc aisément présentes à l'esprit les valeurs numériques approchées des éléments d', par exemple 1/100 environ pour des circuits communs 1/300 pour des circuits soignés.

Il y a lieu néanmoins de distinguer parfois d et d' et c'est pourquoi nous avons adopté deux notations différentes; pour la clarté de ce qui suivra nous placerons côte à côte les expressions de ces quantités :

$$(3)\qquad d' = \frac{R}{L\omega} \quad d = \frac{R}{L\tau_i} = \frac{\delta}{\pi} \quad \frac{d'}{d} = \frac{\tau_i}{\omega}$$

et nous remarquerons que les ξ peuvent encore s'écrire

$$(4)\qquad \xi_1 = \frac{1}{d_1}\left(\frac{\tau_1}{\omega} - \frac{\omega}{\tau_1}\right) \quad \xi_2 = \frac{1}{d_2}\left(\frac{\tau_2}{\omega} - \frac{\omega}{\tau_2}\right).$$

Dans les mêmes conditions de voisinage des pulsations ω et τ_i, on peut écrire

$$\frac{\tau_i^2 - \omega^2}{\omega^2} = 2\,\frac{\Delta\omega}{\omega},$$

et les ξ ne sont autre chose que les doubles des désaccords relatifs des circuits, divisés par les d' correspondants

$$\xi_1 = \frac{2}{d'_1}\frac{\Delta_1\omega}{\omega} \qquad \xi_2 = \frac{2}{d'_2}\frac{\Delta_2\omega}{\omega}.$$

Les quantités ξ et d' sont des nombres sans dimensions.

Avec ces notations les équations (1) deviennent[1]

$$(5)\qquad \begin{cases} (1 - j\xi_1)\mathfrak{I}_1 + j\dfrac{M}{L_1 d'_1}\mathfrak{I}_2 = \dfrac{E}{R_1} \\ j\dfrac{M}{L_2 d'_2}\mathfrak{I}_1 + (1 - j\xi_2)\mathfrak{I}_2 = 0. \end{cases}$$

Posons encore

$$(6)\qquad k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2} \qquad n^2 = \frac{k^2}{d'_1 d'_2} = \frac{M^2\omega^2}{R_1 R_2}.$$

Nous désignerons le nombre n sous le nom de *degré de couplage*, il joue un rôle important dans la discussion, le comportement des circuits étant très différent suivant que n est supérieur ou inférieur à 1.

Avec ces notations il vient

$$(7)\qquad \mathfrak{I}_2 = \frac{EM\omega}{R_1 R_2}\frac{1}{(\xi_1 + \xi_2) + j(n^2 + 1 - \xi_1\xi_2)}.$$

et l'amplitude du courant secondaire est

$$(8)\qquad I_2 = \frac{EM\omega}{R_1 R_2}\frac{1}{\sqrt{(\xi_1 + \xi_2)^2 + (n^2 + 1 - \xi_1\xi_2)^2}}.$$

Partant de ces formules, nous allons étudier les variations du courant secondaire, tout d'abord en supposant ω et K constants et en faisant varier les accords des circuits; c'est-à-dire η_1 et η_2; ensuite, laissant les circuits fixes, nous modifierons ω; enfin nous rechercherons l'influence des variations de couplage.

Nous supposerons que les résistances R_1 et R_2 sont des constantes; cela n'est pas rigoureux quand ω varie, mais les variations relatives

1. Les quantités $(1 - j\xi)$ sont en relation simple avec les impédances complexes. On a en effet :

$$1 - j\xi = \frac{1}{R}(R + jS) \qquad \mathfrak{Z} = R(1 - j\xi).$$

de la fréquence d'excitation sont généralement si faibles que cette approximation est suffisante. D'autre part, nous nous placerons dans le cas conforme à la pratique où les variations d'accord des circuits sont obtenues par des condensateurs variables, les inductances restant fixes; les quantités d' ou d seront alors proportionnelles à $1/\omega$ ou $1/\tau_i$.

Nous pouvons dès maintenant noter que le *courant dans le secondaire est indépendant de l'ordre dans lequel on a associé les circuits* : c'est-à-dire qu'il reste le même si l'on prend le circuit 2 comme primaire et le circuit 1 comme secondaire. Cela résulte immédiatement de la symétrie des formules précédentes.

2. **Maxima et minima de I_2 quand ω et K restant constants, on modifie les accords des circuits.** — Remarquons d'abord que l'expression I_2 ne contient que le paramètre n; tous les cas correspondant au même degré de couplage auront donc la même représentation par rapport aux variables τ_i, indépendamment des éléments d'. Cette représentation étant obtenue, il sera facile de passer à la représentation en fonction des désaccords $\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{d'}{2}\xi$, en modifiant les variables dans les rapports $\frac{d_1}{2}$ et $\frac{d'_2}{2}$.

Les maxima et minima de I_2 s'obtiennent en annulant les dérivées $\frac{\partial I_2}{\partial \xi_1}$ et $\frac{\partial I_2}{\partial \xi_2}$ ce qui donne

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 - \xi_1(n^2 + 1 - \xi_1\xi_2) &= 0 \\ \xi_1 + \xi_2 - \xi_2(n^2 + 1 - \xi_1\xi_2) &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit les solutions

$$(9) \qquad \begin{cases} \xi_1 = \xi_2 = 0 \\ \xi_1 = \xi_2 = \pm\sqrt{n^2 - 1}. \end{cases}$$

Ces résultats montrent d'abord qu'il y a lieu de considérer deux cas.

1er Cas : $\qquad n \leqslant 1 \quad$ ou $\quad M^2\omega^2 < R_1R_2.$

La solution $\xi_1 = \xi_2 = 0$ existe seule; elle correspond évidemment à un maximum de I_2. On voit aisément que

Pour $n = 1$ $\qquad I_2^{Max} = \dfrac{E}{2\sqrt{R_1 R_2}}$.

Pour $n < 1$ $\qquad I_2^{Max} = \dfrac{E}{2\sqrt{R_1 R_2}} \dfrac{n^2 + 1}{2n}$.

Donc, dans ce cas, il existe un seul maximum que l'on obtient en accordant les deux circuits sur la fréquence d'excitation; la valeur de ce maximum décroît avec le degré de couplage. Quand n est un peu faible par rapport à 1, I_2^{Max} est sensiblement proportionnel à n.

2e *Cas :* $\qquad n > 1 \quad$ ou $\quad M^2\omega^2 > R_1 R_2$.

Ici, on ne peut savoir *a priori* si les valeurs zéro et $\pm \sqrt{n^2 - 1}$ correspondent à des maxima ou des minima; pour le rechercher, il est commode d'employer le langage géométrique.

Considérons la surface obtenue en portant les ξ et la fonction I_2 sur trois axes rectangulaires [1]. Sur la figure 2 l'axe $0I_2$, non représenté, est supposé perpendiculaire au papier; S′ et S″ représentent les points de coordonnées $\pm \sqrt{n^2 - 1}$. Pour connaître la nature de la surface en S′, S″ et 0, il faut chercher l'équation de l'indicatrice [2] en ces points.

Cette équation est

$$\xi_1^2 \frac{\partial^2 I_2}{\partial \xi_1^2} + 2\,\xi_1 \xi_2 \frac{\partial^2 I_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \xi_2^2 \frac{\partial^2 I_2}{\partial \xi_2^2} = C^{te},$$

les dérivées étant prises au point considéré. Or on a, à un même facteur près,

$$(10) \qquad \frac{\partial^2 I_2}{\partial \xi_1^2} \propto \xi_2^2 + 1 \qquad \frac{\partial^2 I_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \propto 2\,\xi_1 \xi_2 - n^2 \qquad \frac{\partial^2 I_2}{\partial \xi_2^2} \propto \xi_1^2 + 1.$$

On reconnaît que l'indicatrice en S′ et S″ est une ellipse; ces points sont donc des maxima ou des minima; il est aisé de voir que ce sont des maxima. En 0 l'indicatrice est une hyperbole, et l'on se trouve en présence d'un col : I_2 passe par un minimum quand on traverse le point 0 en suivant S″ S′, et par un maximum quand on le traverse dans la direction perpendiculaire.

1. Cette représentation a été employée par M. Beghin.

2. Rappelons que l'indicatrice est la courbe du second ordre qui, au voisinage d'un point, se confond avec la section de la surface par un plan parallèle au plan tangent, et très voisin de ce dernier. Si l'indicatrice est une ellipse, il y a maximum ou minimum si c'est une hyperbole, il existe un col.

La surface cherchée affecte donc la forme de deux collines séparées par un col; on peut la représenter par quelques lignes de niveau.

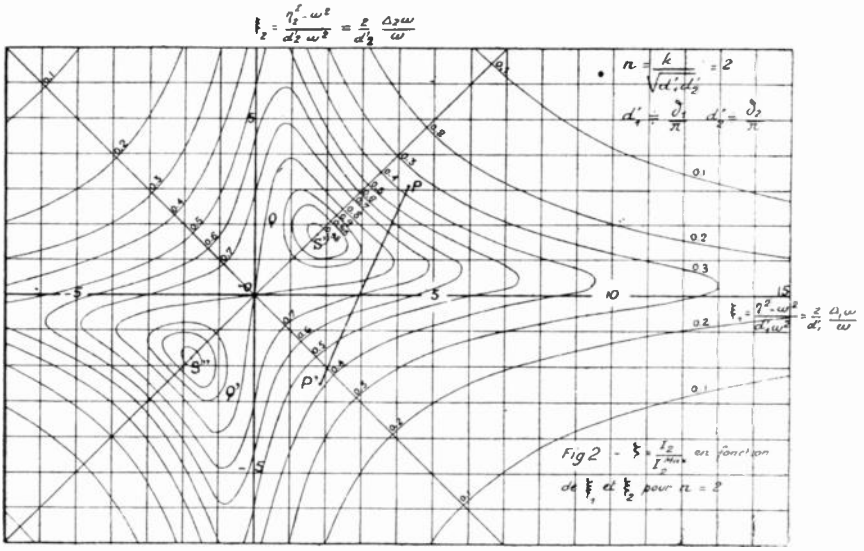


Fig. 2.

Les maxima du courant ont pour valeur commune

$$I_2^{Max} = \frac{E}{2\sqrt{R_1 R_2}};$$

quant à sa valeur en 0 elle est

$$I_2^0 = \frac{E}{2\sqrt{R_1 R_2}} \frac{n^2 + 1}{2n}.$$

L'intensité maximum est donc indépendante du degré de couplage quand celui-ci est supérieur à 1.

On peut remarquer, en passant, que la surface tout entière ne correspond pas au problème physique : de la relation

$$\xi = \frac{\eta_1^2 - \omega^2}{d'\omega^2} = \frac{\eta_1^2}{d'\omega^2} - \frac{1}{d'}$$

on déduit que ξ doit être supérieur à $-\frac{1}{d'}$. Si donc $\sqrt{n^2 - 1}$ est supérieur à $\frac{1}{d_1'}$ ou $\frac{1}{d_2'}$ le point S'' n'a pas de sens physique; mais

cela ne pourrait arriver que pour des couplages généralement inusités ou des décréments très élevés.

Notons enfin que tout le long de la ligne S″ S′ on a la relation

$$\frac{L_1\omega - 1/C_1\omega}{R_1} = \frac{L_2\omega - 1/C_2\omega}{R_2}$$

qui exprime que les réactances des deux circuits sont proportionnelles à leurs résistances; cela résulte de ce que cette ligne a pour équation $\xi_2 = \xi_1$.

3. **Variations de $\frac{I_2}{I_2^{Max}} = \zeta$ en fonction de η_1 et η_2, k et ω restant constants.** — Pour se rendre compte des variations de I_2 quand les

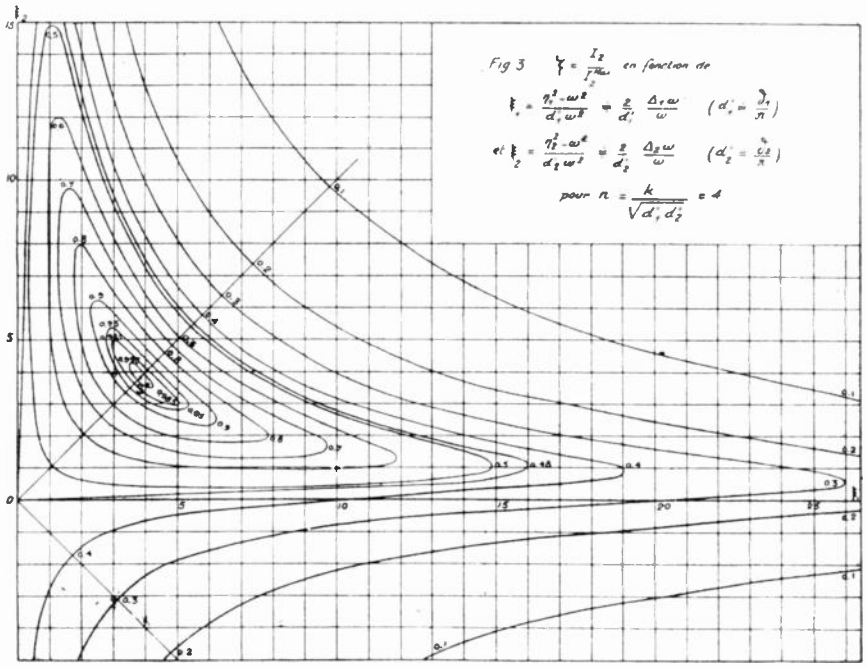


Fig 3 $\zeta = \frac{I_2}{I_2^{Max}}$ en fonction de
$\xi_1 = \frac{\eta_1^2 - \omega^2}{d_1' \omega^2} = \frac{2}{d_1'} \frac{\Delta_1 \omega}{\omega}$ $(d_1' = \frac{\delta_1}{\pi})$
et $\xi_2 = \frac{\eta_2^2 - \omega^2}{d_2' \omega^2} = \frac{2}{d_2'} \frac{\Delta_2 \omega}{\omega}$ $(d_2' = \frac{\delta_2}{\pi})$
pour $n = \frac{k}{\sqrt{d_1' d_2'}} = 4$

Fig. 3.

accords des circuits prennent toutes les valeurs possibles, il suffit de tracer quelques lignes de niveau de la surface précédente; c'est ce que nous avons fait sur les figures 2, 3 et 5 pour divers degrés de couplage en prenant comme unité d'intensité la valeur maximum. La fonction représentée est donc

$$(11) \qquad \zeta = \frac{I_2}{I_2^{Max}} = \frac{2n}{\sqrt{(\xi_1 + \xi_2)^2 + (n^2 + 1 - \xi_1 \xi_2)^2}}.$$

L'effet produit par le changement d'accord d'un seul circuit s'obtient en traçant une parallèle à l'un des axes; mais il ne faut pas oublier que les coordonnées ξ_1 et ξ_2 contiennent en facteur $1/d'_1$ et $1/d'_2$. Si les décréments des deux circuits sont inégaux, la représentation choisie, avantageuse par sa généralité, ne permet pas de

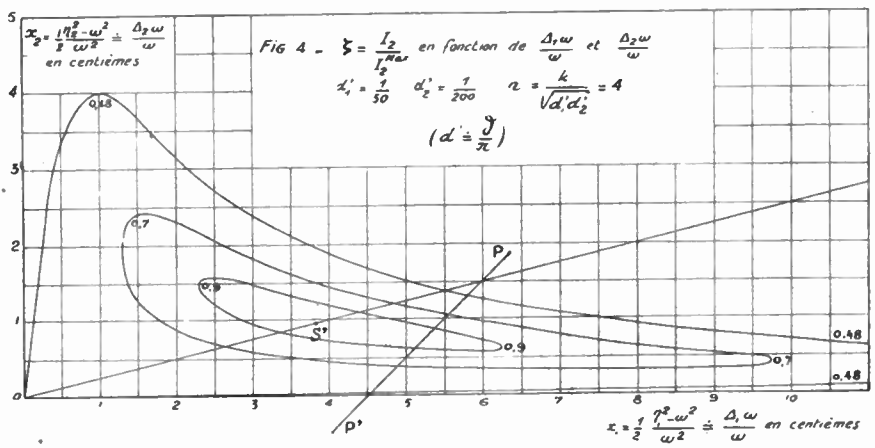


Fig 4 - $\zeta = \frac{I_2}{I_2^{Max}}$ en fonction de $\frac{\Delta_1\omega}{\omega}$ et $\frac{\Delta_2\omega}{\omega}$
$d'_1 = \frac{1}{50}$ $d'_2 = \frac{1}{200}$ $n = \frac{k}{\sqrt{d'_1 d'_2}} = 4$
$(d' = \frac{\vartheta}{\pi})$
$x_2 = \frac{1}{2}\frac{\eta_2^2 - \omega^2}{\omega^2} \doteq \frac{\Delta_2\omega}{\omega}$ en centièmes
$x_1 = \frac{1}{2}\frac{\eta^2 - \omega^2}{\omega^2} \doteq \frac{\Delta_1\omega}{\omega}$ en centièmes
0.48
0.7
0.9
P
P'
0.9
0.7
0.48

Fig. 4.

mettre nettement en évidence les différences existant entre les effets de l'accord de l'un ou l'autre circuit; il est alors préférable de prendre comme variables les quantités

$$(12) \qquad \frac{\Delta_1\omega}{\omega} = \frac{d'_1}{2}\xi_1 \qquad \frac{\Delta_2\omega}{\omega} = \frac{d'_2}{2}\xi_2.$$

C'est ce que nous avons fait sur la figure 4 pour le cas où $n = 4$ et $d'_1/d'_2 = 4$.

Si l'on désire seulement se rendre compte des différences de comportement des deux accords, sans chercher les valeurs numériques absolues des $\frac{\Delta\omega}{\omega}$, il est commode de remarquer que la figure 4 est

semblable à la projection de la figure 3 sur un plan passant par $0\xi_1$ et faisant avec celui de cette figure un angle α donné par

$$\cos\alpha = \frac{1}{p} = \frac{d'_2}{d'_1}$$

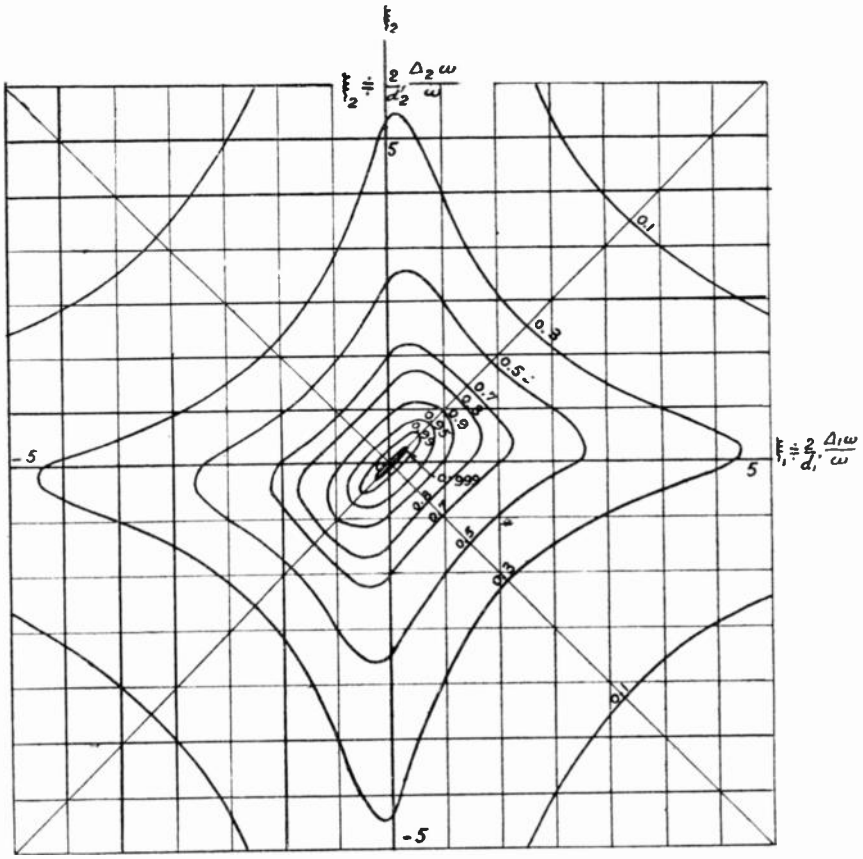


Fig. 5. — $\zeta = \frac{I_2}{I_{2\,Max}}$ en fonction de ξ_1 et ξ_2; $n = \sqrt{\frac{k}{d'_1 d'_2}} = 1$; $\left(d' = \frac{\sigma}{\pi}\right)$.

4. **Cas où l'un des circuits est apériodique.** — Supposons, par exemple, le primaire apériodique; alors $\gamma_1 = 0$, $\xi_1 = -1/d''_1$, et on ne peut agir que sur ξ_2 pour modifier I_2. Le maximum de cette intensité correspondra encore à $\xi_1 = \xi_2 = -\sqrt{n^2 - 1}$, ce qui donne ici

$$\sqrt{n^2 - 1} = \frac{1}{d_1'} \qquad \text{ou} \qquad n^2 = 1 + \frac{1}{d_1'^2},$$

ce qui revient à

$$M^2\omega^2 = R_1R_2\left[1 + \left(\frac{L_1\omega}{R_1}\right)^2\right],$$

ou encore, le facteur de surtension étant généralement grand par rapport à l'unité [1],

$$M\omega = L_1\omega\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} = \frac{\sqrt{R_1R_2}}{d_1'}, \tag{13}$$

Le maximum de I_2 sera naturellement toujours

$$I_2^{Max} = \frac{E}{2\sqrt{R_1R_2}},$$

et l'accord du secondaire sera donné par

$$\xi_2 = -\frac{1}{d_1'} \qquad \text{ou} \qquad \eta_2^2 = \left(1 - \frac{d_2'}{d_1'}\right)\omega^2.$$

Il semble résulter de ce qui précède qu'un primaire apériodique permet d'obtenir une intensité secondaire aussi élevée que deux circuits accordables, et qu'il n'y a pas lieu de considérer *a priori* que l'impossibilité d'accorder l'un des circuits crée une infériorité dans un système couplé; il y a lieu cependant de faire les remarques suivantes :

La relation 13 montre que le couplage de résonance devra être notablement plus élevé dans le cas actuel que dans le cas où on peut accorder les deux circuits; le rapport des deux couplages sera sensiblement $1/d_1'$. Si le facteur de surtension est très élevé, il pourra même arriver qu'il soit impossible d'atteindre la valeur de M nécessaire; la chose sera d'autant plus difficile que R_2 sera plus grand. En outre, la relation précédente montre que d_2' devra être inférieur à d_1' pour que, la valeur de M étant atteinte, on puisse accorder convenablement le secondaire. Enfin, l'importance du

1. Le cas inverse peut se rencontrer : dans un couplage de deux lampes par transformateur le primaire est en général apériodique et sa résistance est la résistance filament-plaque de la lampe; $\left(\frac{L_1\omega}{R_1}\right)^2$ est alors $\ll 1$ quand il s'agit de haute fréquence. Alors $M\omega = \sqrt{R_1R_2}$.

couplage nécessaire conduira à multiplier le nombre des spires des bobines, ce qui augmentera R_1 et R_2 et réduira par conséquent I_2. On ne peut pas énoncer de règles générales sur les avantages et les inconvénients des primaires apériodiques qui offrent souvent des avantages sérieux et chaque cas devra être examiné en particulier.

5. **Représentation plane des variations de I_2, ω et k restant constants.** — La représentation des variations de ζ par une surface nous a paru indispensable pour bien mettre en évidence l'allure de ces variations, mais il est possible d'en obtenir une autre plus

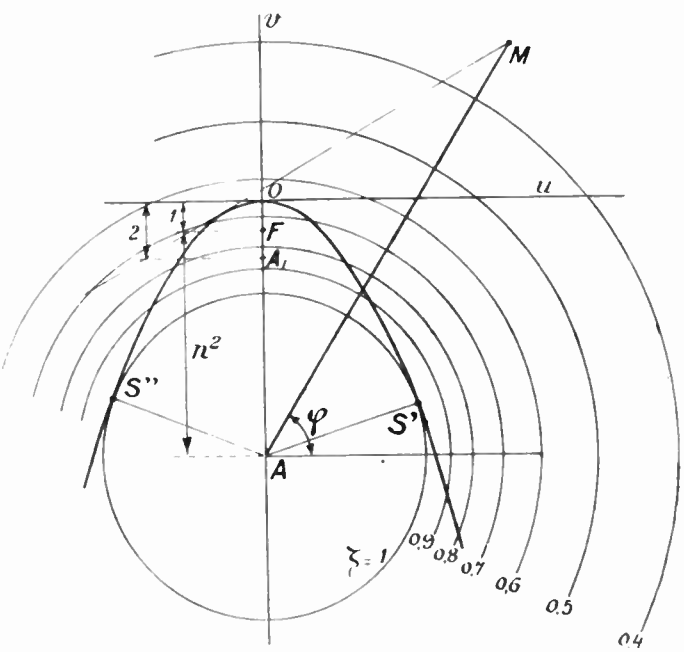


Fig. 6.

simple, convenant à tous les cas et susceptible de résoudre tous les problèmes de couplage par une construction graphique immédiate.

Nous avons trouvé (formule 7) que

$$\frac{1}{\zeta_2} = \frac{R_1 R_2}{EM\omega}\,[(\xi_1 + \xi_2) + j\,(n^2 + 1 - \xi_1\xi_2)].$$

Posons

$$(14)\qquad \begin{cases} u = \xi_1 + \xi_2 \\ v = -\xi_1\xi_2 \end{cases}$$

et marquons par rapport aux deux axes de la figure 6 le point M, de coordonnées u et v; puis portons sur ov le segment

$$\overline{OA} = -(n^2 + 1).$$

On voit immédiatement que AM représente, à une échelle convenable, l'inverse de l'intensité I_2 correspondant au couple de valeurs ξ_1 et ξ_2 choisies et que l'angle φ est le retard de phase de I_2 sur la force électromotrice E. Nous allons montrer que la représentation de la fonction

$$y = u + jv,$$

indépendante de n et satisfaisant par conséquent à tous les cas possibles est particulièrement simple. Cette représentation étant réalisée, on en déduira la valeur de l'intensité ramenée à sa valeur maximum par la relation

$$\zeta = \frac{I_2}{I_2^{Max}} = \frac{2n}{AM}, \tag{15}$$

comme il résulte de la formule 14.

Les équations 14 montrent que si l'un des ξ est constant, ξ_2 par exemple, le point M se déplace sur la droite MM′ ayant pour équation

$$v = -\xi_2(u - \xi_2),$$

et la valeur de ξ_1 correspondant à un point particulier de cette droite est

$$\xi_1 = u - \xi_2.$$

Si donc on trace le réseau de ces droites, on pourra déterminer très facilement en fonction de ξ_1 et de ξ_2 la valeur de ζ quels que soient les circuits et leur degré de couplage.

Toutes ces droites ont pour enveloppe la parabole

$$u^2 + 4v = 0,$$

et le point de tangence de l'une d'elles a pour abscisse $u = 2\xi_2$. Le graphique complet est dessiné sur la figure 7, il est inutile, en raison de la symétrie, de tracer les droites correspondant aux valeurs positives de ξ_2; pour la même raison de symétrie, le graphique que l'on dessinerait en traçant les droites $\xi_1 =$ constante serait identique au précédent.

Ce graphique se prête à une discussion très simple des cas de couplage : Rappelons d'abord que le rayon de courbure d'une parabole, à son sommet, est égal au paramètre de la parabole. Dans le cas actuel ce paramètre est égal à 2. Il en résulte que

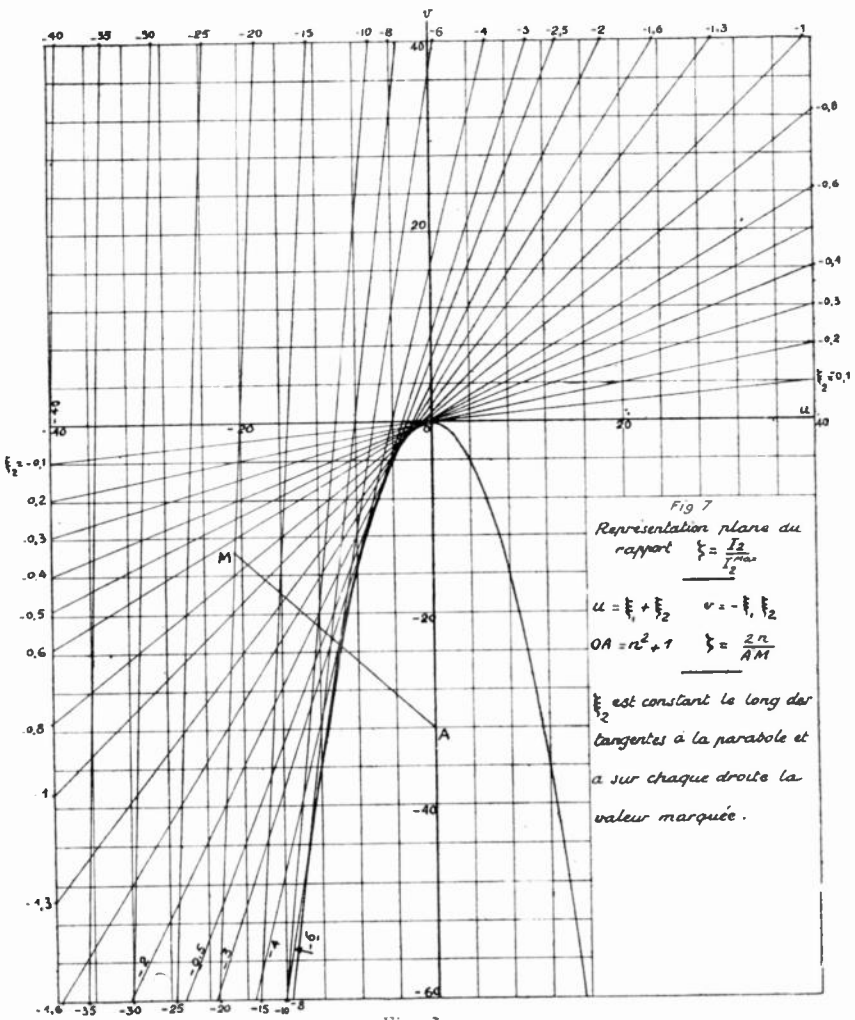

v
u
M
A
Fig 7
Representation plane du rapport $\xi = \frac{I_2}{I_{2max}}$
$u = \xi_1 + \xi_2$ $v = -\xi_1 \xi_2$
$OA = n^2 + 1$ $\xi = \frac{2n}{AM}$
ξ_2 est constant le long des tangentes à la parabole et a sur chaque droite la valeur marquée.

Fig. 7.

si n est supérieur à 1, il y aura deux maxima correspondant aux points S′ et S″. Si n est inférieur à 1, il n'y en aura qu'un seul, correspondant au sommet 0.

Une valeur de n étant choisie, les lignes de niveau de ξ seraient des cercles décrits de A comme centre.

6. **Variations de ζ en fonction du couplage, τ_{11}, τ_{12}, et ω restant constants.** — On peut se faire une idée de l'influence du couplage en marquant un point fixe sur la figure 2 par exemple, et en faisant varier n par la pensée; les lignes de niveau se déforment et leur passage sur ce point montre les variations de ζ. Mais la représentation plane du paragraphe précédent permet de figurer exactement ces variations.

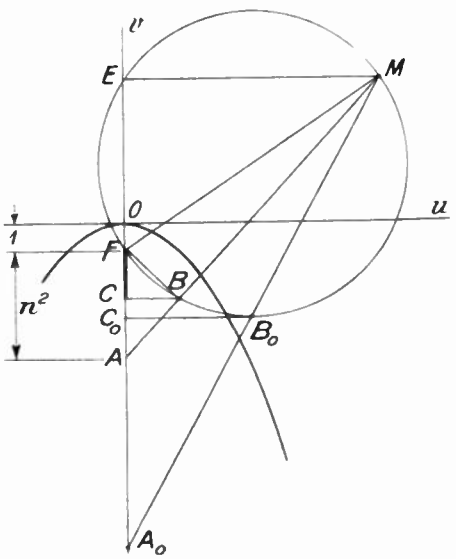


Fig. 8.

Marquons sur la figure 8 le foyer de la parabole et portons $FA = n^2$; marquons encore le point M correspondant à un état des circuits, et traçons le cercle de diamètre FM. La valeur de ζ^2 correspondant au point M peut se représenter par

$$\zeta^2 = \frac{4}{ME^2} \cdot FC,$$

expression dans laquelle FC est seul variable quand n varie, M restant fixe. On a en effet (formule 14) $\zeta^2 = \frac{4n^2}{\overline{AM}^2}$ et on peut écrire

$$\zeta^2 = \frac{4n^2}{\overline{AM}^2} = 4\,\frac{AF}{\overline{AM}^2} = \frac{4}{AM}\,\frac{AF}{AM} = \frac{4}{AM}\,\frac{FB}{ME} = \frac{4}{ME}\,\frac{FC}{ME}.$$

La valeur maximum de ζ pour le point M choisi correspond donc à la position A_0 du point A et comme $\overline{B_0C_0}^2 = C_0F.C_0E$, il vient

$$\frac{1}{\zeta_{Max}^2} = \frac{1}{C_0E}$$

Si M est pris sur la parabole, ce maximum est égal à 1, car C_0E est alors la moitié de la sous-normale. Ce résultat ne surprendra pas si l'on remarque qu'en un point de la parabole on a toujours $\xi_1 = \xi_2$; sur la figure 2 le point représentatif est alors sur la droite S'S'', et il est évident qu'en modifiant n on peut amener l'un des points S' ou S'' sur le point M.

Le couplage optimum est donné par

$$n_{opt}^2 = FA_0 = FM = \sqrt{n^2 + (\nu + 1)^2} = \sqrt{(1 + \xi_1)^2 (1 + \xi_2)^2},$$

qu'on peut encore écrire

$$n_{opt}^2 = \frac{Z_1 Z_2}{R_1 R_2} \quad \text{ou} \quad M^2\omega^2 = Z_1 Z_2,$$

Z_1 et Z_2 étant les impédances des deux circuits; on a en effet (note du paragraphe 1)

$$Z = R\sqrt{1 + \xi^2}.$$

7. **Variations de ζ en fonction de ω. — Déformations de la surface quand ω varie.** — Quand τ_{i1} et τ_{i2} restent constants, c'est ω qui varie, l'étude de la fonction devient plus difficile, car alors

$$\nu^2 = \frac{k^2}{d_1 d_2} \frac{\omega^2}{\tau_{i1}\tau_{i2}}$$

varie en même temps que ξ_1 et ξ_2, et la surface précédemment étudiée se déforme. Nous allons montrer que, quand n ne dépasse pas quelques unités, cette déformation est pratiquement négligeable pour les petites variations habituelles de ω, et que l'on peut encore utiliser les représentations géométriques précédentes, en donnant à n sa valeur moyenne dans l'intervalle où ω varie. Nous examinerons ensuite le cas où n est grand.

Quand la fonction ζ définie par

$$\frac{1}{\zeta^2} = \frac{(\xi_1 + \xi_2)^2 + (n^2 + 1 - \xi_1\xi_2)^2}{4n^2}$$

varie sous l'influence d'un accroissement $\Delta\omega$, on peut obtenir sa variation en considérant d'abord celle qui résulte du changement des γ_i seulement, n restant constant, ensuite celle qui provient du changement de n, les γ_i restant constants. La première opération consiste à utiliser la surface correspondant à la valeur initiale de n, la seconde à calculer $\Delta\zeta$ en fonction de Δn.

En prenant les dérivées logarithmiques on a

$$\frac{\Delta\zeta}{\zeta} = \frac{\Delta n}{n}\left[1 - \frac{2n^2(n^2 + 1 - \xi_1\xi_2)}{(\xi_1 + \xi_2)^2 + (n^2 + 1 - \xi_1\xi_2)^2}\right] =$$

$$= \frac{\Delta n}{n}\left[1 - \frac{\zeta^2}{2}(n^2 + 1 - \xi_1\xi_2)\right].$$

Désignant par y le second terme du crochet et remarquant que

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\Delta\omega}{\omega},$$

on peut écrire

$$\frac{\Delta\zeta}{\zeta} = \frac{\Delta\omega}{\omega}(1 - y).$$

On voit que la fonction y s'annule le long de l'hyperbole $\xi_1\xi_2 = n^2 + 1$ et qu'elle est positive dans la région contenant l'origine, négative dans l'autre région du plan; son étude détaillée montre que sa valeur absolue passe par deux maxima

$$\frac{n^2}{2(\sqrt{n^2 + 1} \mp 1)}$$

pour

$$\xi_1^2 = \xi_2^2 = n^2 + 1 \mp 2\sqrt{n^2 + 1}.$$

Le plus grand de ces maxima correspond à une valeur positive de y, le plus petit à une valeur négative, et les valeurs absolues maxima de $(1 - y)$ sont données par le tableau suivant :

$n =$	1	3	5	10	grand
$(1 - y)_{max} =$	1,2	2,1	3,1	5,5	$(n/2 + 1)$.

Ces considérations montrent que les déformations de la surface sont négligeables dans la pratique quand n ne dépasse pas quelques unités, car $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ est en général de l'ordre de 1 ou 2/100; dans tous les

cas, elles permettent de se faire une idée des erreurs à craindre en négligeant les variations de n. Au contraire pour les grandes valeurs de ce paramètre, les déformations sont très importantes.

8. **Variations de ζ en fonction de ω quand n ne dépasse pas quelques unités.** — D'après ce qui précède, nous pourrons employer les représentations géométriques précédemment étudiées, en y prenant pour n la valeur moyenne de cet élément. Voyons maintenant comment se déplace le point moyen de coordonnées ξ_1 et ξ_2 quand la fréquence d'excitation seule est modifiée.

En désignant par $\Delta\xi_1$ et $\Delta\xi_2$ les variations de ξ_1 et ξ_2 correspondant à une variation $\Delta\omega$, on a

$$\frac{\Delta\xi_2}{\Delta\xi_1} = \frac{d_1}{d_2}\,\frac{\eta_{i1}\,\omega^2 + \eta_{i2}^2}{\eta_{i2}\,\omega^2 + \eta_{i1}^2}$$

ou sensiblement

$$\frac{\Delta\xi_2}{\Delta\xi_1} = \frac{d_1}{d_2} = \text{constante},$$

car η_{i1}, η_{i2} et ω diffèrent peu.

Si donc ω varie, le point représentatif de la figure 2 se déplace sur un segment de droite PP′ de coefficient angulaire

$$p = \frac{d_1}{d_2}.$$

Sur la figure 4, où les coordonnées sont $\frac{1}{2}\,\frac{\eta_{i1}^2 - \omega^2}{\omega^2}$ et $\frac{1}{2}\,\frac{\eta_{i2}^2 - \omega^2}{\omega^2}$, le déplacement du point figuratif est parallèle à la bissectrice de l'angle des axes. Dans l'un et l'autre cas on suit facilement les variations de ζ.

Avec la représentation plane des figures 6 et 7, le point figuratif se déplace sur une parabole. On a en effet

$$\xi_2 = p\xi_1 + q, \quad u = (1 + p)\xi_1 + q, \quad v = -p\xi_1^2 - q\xi_1,$$

d'où

$$\left[u + \frac{p+1}{2p}\,q\right]^2 + \frac{(p+1)^2}{p}\left[v - \frac{q^2}{4p}\right] = 0.$$

A une valeur donnée de p correspond une parabole de forme

déterminée, que les variations de q ne font que déplacer parallèlement à elle-même. Si $q = 0$, c'est-à-dire si les deux circuits sont accordés sur la même fréquence ($\eta_1 = \eta_2$), toutes les paraboles ont le même sommet et on peut tracer leur réseau comme sur la figure 10.

En marquant encore sur ce graphique un point A tel que

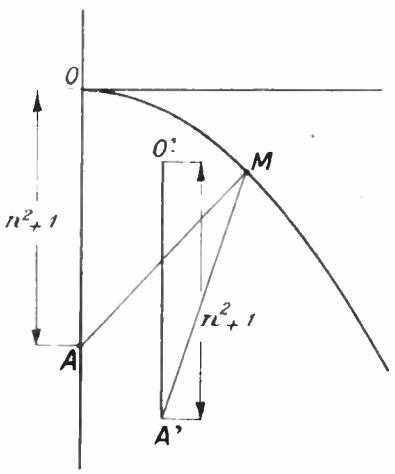


Fig. 9.

$0A = (n^2 + 1)$ (fig. 9) et en déplaçant le point représentatif M sur la parabole correspondante, on obtient les variations de ζ par la formule 15.

$$\zeta = \frac{2n}{AM}.$$

Si q n'était pas nul, on voit que le même réseau serait utilisable en portant le segment $0'A' = (n^2 + 1)$ parallèlement à l'axe des v à partir d'un point $0'$ de coordonnées

$$u = -\frac{p + 1}{2p} q, \qquad v = \frac{q^2}{4p}.$$

Quant aux valeurs de $\frac{\Delta\omega}{\omega}$, elles se détermineraient sur le graphique par la relation

$$\xi_1 = \frac{2}{d_1'} \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{u - q}{1 + p}.$$

9. **Variations de ζ en fonction de ω quand n est grand**; $d_1 = d_2$. — Si n est grand, de l'ordre de la centaine par exemple, ce qui avec

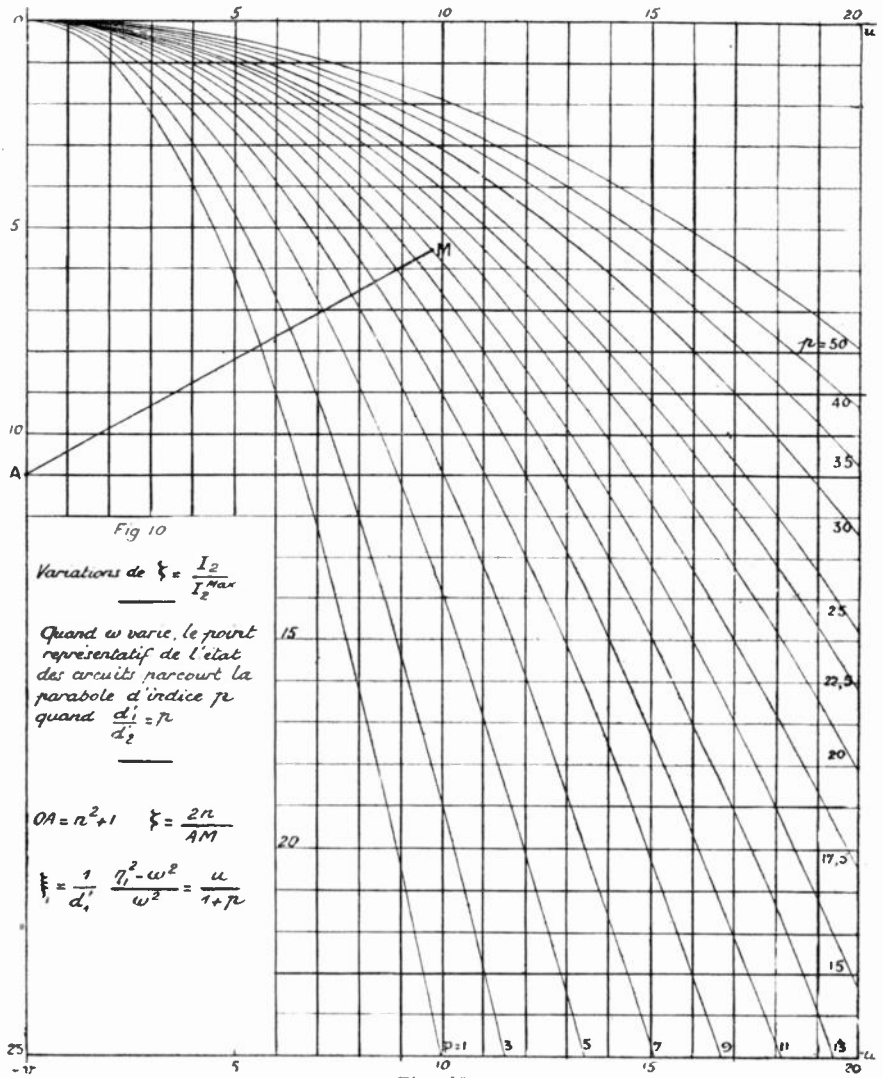


Fig. 10.

les décréments normaux correspond à des coefficients k de quelques dixièmes, on a sensiblement

$$\left|\frac{\Delta\zeta}{\zeta}\right| = \frac{\Delta\omega}{\omega} \cdot \frac{n}{2},$$

et les variations de ω déforment considérablement les représenta-

tions géométriques. Dans ce cas, on ne pourrait obtenir les variations de ζ qu'en traçant la courbe donnée par l'expression

$$\frac{1}{\zeta^2} = \frac{4n^2}{(\xi_1 + \xi_2)^2 + [n^2 + 1 - \xi_1\xi_2]^2},$$

où l'on ferait

$$\xi_2 = p\xi_1 + q.$$

Mais la connaissance des variations de ζ pour un domaine étendu de ω n'est généralement pas nécessaire et, pour les forts couplages, les régions les plus utiles sont celles qui avoisinent les sommets S' et S'' (fig. 2). On peut alors mettre ζ sous une forme très simple pour le cas où $d_1 = d_2 = d$.

En admettant que le segment figuratif des variations de ω passe par S' ou S'', ξ_1 et ξ_2 sont égaux; nous désignerons leur valeur commune par ξ. On pourra alors écrire

$$\frac{1}{\zeta^2} = \frac{4\xi^2 + (n^2 + 1 - \xi^2)}{4n^2} = 1 + \frac{(n^2 - 1 - \xi^2)^2}{4n^2}.$$

Dans le voisinage des sommets S' et S'', $(n^2 - 1 - \xi^2)$ est petit; désignons sa valeur par

$$\varepsilon = n^2 - 1 - \xi^2,$$

expression dans laquelle il faut bien remarquer que n et ξ varient tous deux avec ω. Désignant par n_s la valeur du degré de couplage au moment du maximum, la coordonnée ξ_s de ce maximum sera $\xi_s^2 = n_s^2 - 1$; écrivons alors

$$\varepsilon = (n^2 - 1) - (n_s^2 - 1) + \xi_s^2 - \xi^2.$$

En remarquant que

$$n = \frac{k}{d}\frac{\omega}{\tau_i} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{1}{d}\left(\frac{\tau_i}{\omega} - \frac{\omega}{\tau_i}\right),$$

il vient

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 - \omega_s^2}{d^2\tau_i^2}\left[\frac{\tau_i^4}{\omega^2\omega_s^2} - (1 - k^2)\right].$$

Pour représenter par une courbe, commode pour l'usage, les variations de ζ, posons

$$\Delta\omega = \omega - \omega_s.$$

$\frac{\Delta\omega}{\omega_s}$ sera l'abscisse d'un point de la courbe, en prenant pour origine la projection de son sommet. Remarquons encore que

$$\frac{1}{d'}\left(\frac{\tau_i^2}{\omega_s^2} - 1\right) = \pm\sqrt{n^2 - 1}$$

$$\text{d'où } \tau_i^2 = (1 \pm nd')\,\omega_s^2 = (1 \pm k)\,\omega_s^2,$$

et convenons de négliger les puissances de $\frac{\Delta\omega}{\omega_s}$ égales ou supérieures à 2; nous pourrons écrire

$$\frac{\varepsilon}{2n_s} = \frac{2(1 \pm k)}{d'}\,\frac{\Delta\omega}{\omega_s}.$$

On a donc finalement

$$(16) \qquad \frac{I}{I_2^2} = 1 + \left[\frac{2(1 \pm k)}{d'}\,\frac{\Delta\omega}{\omega_s}\right]^2$$

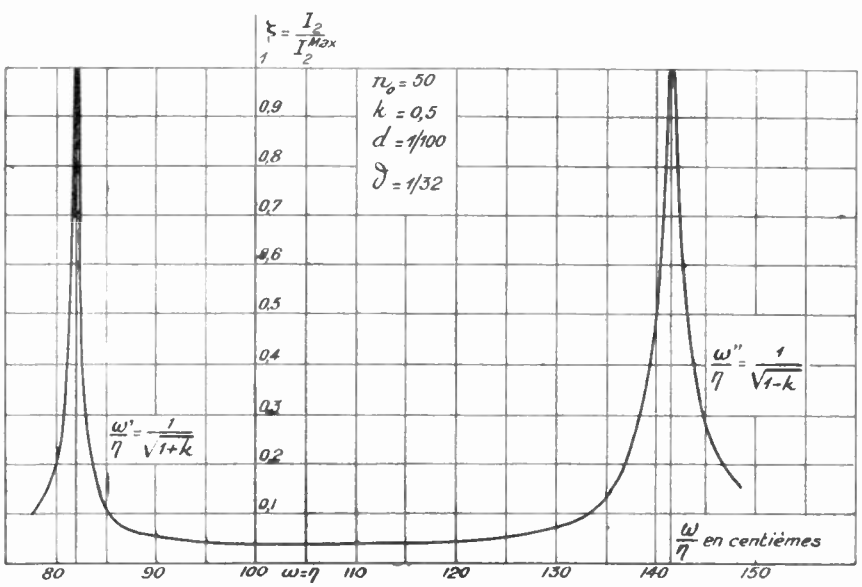


Fig. 11.

au premier ordre près en $\frac{\Delta\omega}{\omega}$, formule très simple pour étudier la résonance de deux circuits très fortement couplés. On remarquera que la courbe correspondant à S' (signe +, fréquence de résonance

la plus basse) est plus pointue que celle qui correspond au point S'' (signe —); c'est ce qui apparaît bien sur la figure 11 tracée pour $n = 50$, $d = 1/100$, $k = 0{,}5$. Les pulsations correspondant aux deux résonances sont enfin, d'après la relation ci-dessus

$$\tau_i^2 \doteq (1 \pm k)\omega_\xi^2$$

$$\omega_{S'} \doteq \frac{\tau_i}{\sqrt{1 + k}} \qquad \omega_{S''} \doteq \frac{\tau_i}{\sqrt{1 - k}}.$$

Notons enfin que, quelle que soit la valeur de n, il est possible d'utiliser la représentation plane du paragraphe 5; il suffit en effet de modifier la position du point A à mesure que n varie.

10. Oscillations contraintes de deux circuits couplés par induction électrique. — Supposons les circuits couplés comme sur la figure 12;

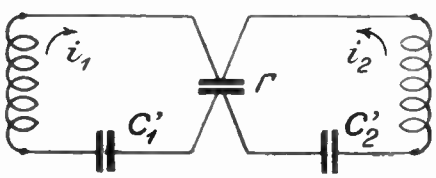


Fig. 12.

on peut traiter ce cas exactement comme le précédent et obtenir une expression de $\mathcal{J}_2$ ne différant de la formule 7 que par le remplacement de $M\omega$ par $-\frac{1}{\Gamma\omega}$, ces deux éléments représentant les inductions magnétique et électrique.

Nous poserons, comme précédemment,

$$\tau_i^2 = \frac{1}{LC} \qquad d' = \frac{R}{L\omega} \qquad \xi = \frac{1}{d'}\frac{\tau_i^2 - \omega^2}{\omega^2},$$

mais il y a lieu de remarquer que les valeurs des capacités qui interviennent dans les accords des circuits ne sont pas les capacités C_1' et C_2' des condensateurs de chaque circuit, mais celles données par

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_1'} + \frac{1}{\Gamma} \qquad \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_2'} + \frac{1}{\Gamma}$$

Ce sont les capacités C_1 et C_2 que nous introduisons dans les expressions des ξ; la transformation des équations conduit d'ailleurs

naturellement à cette introduction. Les équations du système peuvent alors s'écrire

$$(1 - j\xi_1)\mathfrak{I}_1 - j\frac{C_1}{\Gamma d_1'}\mathfrak{I}_2 = \frac{E}{R_1}$$

$$-j\frac{C_2}{\Gamma d_2'}\mathfrak{I}_1 + (1 - j\xi_2)\mathfrak{I}_2 = 0$$

tout à fait analogues aux équations 5.

Cette fois le coefficient de couplage k et le degré de couplage n seront donnés par

$$k^2 = \frac{C_1 C_2}{\Gamma^2} \qquad n^2 = \frac{k^2}{d_1' d_2'} = \frac{1}{\Gamma^2\omega^2 R_1 R_2}.$$

Avec ces notations on trouve

$$\mathfrak{I}_2 = -\frac{E}{R_1 R_2}\frac{1}{\Gamma\omega}\frac{1}{(\xi_1 + \xi_2) + j(n^2 + 1 - \xi_1\xi_2)}.$$

Toutes les conclusions pratiques relatives à l'induction magnétique restent valables, en particulier il existe un couplage critique donné par

$$n = 1 \quad \text{ou} \quad k_2 = d_1' d_2' \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\Gamma^2\omega^2} = R_1 R_2,$$

et l'intensité maximum réalisable est

$$I_2^{\text{Max}} = \frac{E}{2\sqrt{R_1 R_2}}.$$

A côté de l'analogie, il faut noter une différence importante avec le cas de l'induction magnétique. Comme les circuits sont presque toujours accordés par variation des capacités, C_1 et C_2 ne sont pas constants, et k varie avec les accords; les surfaces précédemment étudiées se déforment donc quand on modifie les ξ. Dans la représentation plane du paragraphe 5, les réseaux de droite et de courbes restent inchangés, mais le point A se déplace, ce dont il est d'ailleurs facile de tenir compte. Il est clair que ces déformations et déplacements n'ont d'importance que pour des changements d'accords importants, peu courants dans les applications.

Quand c'est ω qui varie, les C restent fixes et la différence ci-dessus n'existe plus.

11. Utilisation des circuits couplés pour obtenir de faibles variations de l'intensité dans une gamme de fréquence étendue. — L'examen des figures 2 et 3 montre que l'on peut disposer les circuits de façon que le rapport ζ varie très peu pour des changements importants de la fréquence d'excitation, ce qui présente de l'intérêt pour certains problèmes. Il suffit de faire en sorte que le segment PP′ correspondant aux variations de ω soit aligné le long d'une des courbes de niveau dans les régions où elles sont sensiblement rectilignes.

Pour obtenir ce résultat, on déterminerait les décréments des deux circuits de façon que le quotient $p = \frac{d_1}{d_2}$ soit précisément égal au coefficient angulaire de la direction moyenne de la courbe de niveau dans la région considérée et on donnerait à γ_{11} et à γ_{12} des

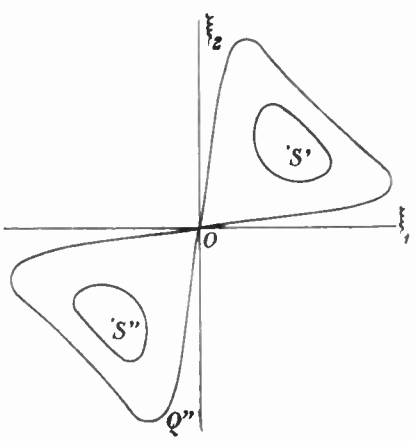


Fig. 13.

valeurs convenables pour placer PP′ dans cette région; cela revient à déterminer convenablement les coefficients de l'équation

$$\xi_2 = p\xi_1 + q.$$

Nous allons examiner un des cas qui paraît le plus intéressant, c'est celui où γ_{11} étant égal à γ_{12}, le segment PP′ passe par l'origine. Il faut alors orienter ce dernier dans la direction $Q'Q''$ (fig. 2 et 13) de la tangente à l'origine de la ligne de niveau passant en ce point, c'est-à-dire suivant l'asymptote de l'indicatrice de la surface au

point 0. L'équation de cette indicatrice est, d'après les formules 10,

$$\xi_2^2 - 2n^2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 = C^{te};$$

on prendra donc

$$\frac{d_1}{d_2} = p = n^2 + \sqrt{n^4 - 1}. \tag{17}$$

En traitant directement cette question, on se rend peut-être mieux compte des avantages que peut fournir ce choix. Imaginons qu'après avoir réglé les circuits sur la même fréquence, nous fassions varier ω, on aura

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{d_1}{d_2} = p,$$

et la formule 11 deviendra

$$\frac{1}{\zeta^2} = p^2\xi_1^2 - 2p(n^2 - 1) + (1 + p)^2\xi_1^2 - n^2 + 1)^2.$$

ζ restera d'autant plus voisin de son maximum pour les faibles valeurs de ξ_1 que le terme en ξ_1^2 sera faible; on obtiendra donc la plus grande constance de ζ en posant

$$\frac{(1 + p)^2}{2p} = n^2 + 1. \tag{18}$$

Il est facile de voir que cette relation équivaut à 17; si p y satisfait, il vient

$$\frac{1}{\zeta^2} = p^2\left[\xi_1^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1 + p}{p}\right)^2\right].$$

On peut remarquer que si les variations de ζ sont alors très faibles dans le voisinage du maximum, elles deviennent rapides quand ξ_1 dépasse l'unité; on peut donc obtenir un effet appréciable de filtrage.

Pour comparer ζ à sa valeur maximum, atteinte pour $\xi_1 = 0$, écrivons

$$\frac{\zeta_0^2}{\zeta^2} = 1 + 4\left(\frac{p}{1 - p}\xi_1\right)^2$$

et prenons comme variable le rapport $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ en utilisant la relation

$$\xi_1 = \frac{2}{d_1}\frac{\Delta\omega}{\omega}.$$

En posant

$$d_m = \frac{1}{2}(d_1 + d_2),$$

on a

$$\frac{\xi_0^2}{\xi^2} = 1 + \left(\frac{\frac{\Delta\omega}{\omega}}{\frac{d_m}{\sqrt{2}}}\right)^4. \tag{19}$$

Cette formule montre que les variations du courant secondaire ne dépendent que de la moyenne d_m des décréments; la courbe qui les représente (fig. 14) est indépendante de p, elle est donc identique

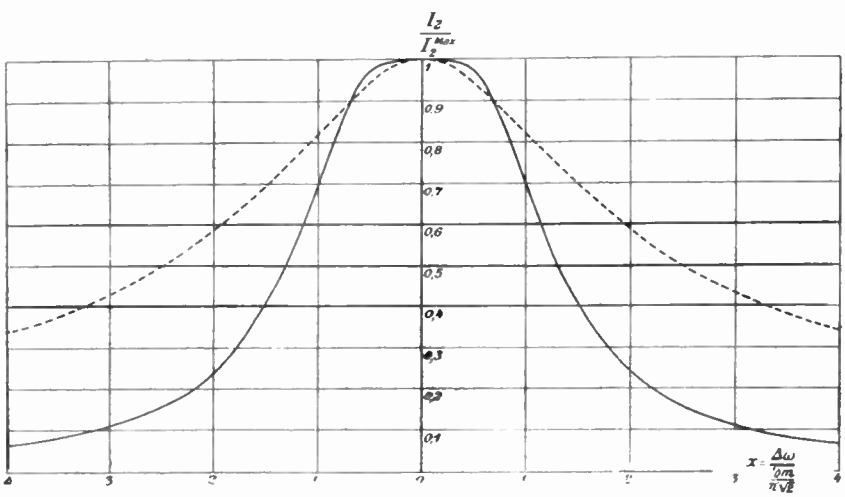


Fig. 14.

à celle qui correspond au couplage critique quand les deux décréments sont égaux : $d_1 = d_2 = d_m$ et $p = 1$. Mais si les variations de l'intensité secondaire sont indépendantes de p, il n'en est pas de même du rendement; on sait que ce dernier peut s'écrire, quand le secondaire est accordé

$$r = \frac{1}{1 + \frac{d_1 d_2}{h^2}} = \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$

C'est précisément notre cas pour le point moyen 0 du segment Q′Q″ parcouru par le point représentatif de l'état des circuits, car

alors $\xi_2 = 0$ ou $\gamma_2 = \omega$. En remplaçant n^2 par son expression 18 en fonction de p, on a

$$r = \frac{1 + p^2}{(1 + p)^2}.$$

Quand p croît à partir de 1, le rendement prend alors les valeurs suivantes :

$p =$	1	3	6	10	15	25
$r =$	0,5	0,68	0,76	0,83	0,89	0,93

Pour apprécier la valeur de $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ qui produit une variation relative de l'intensité, égale à une petite quantité ε, on peut remplacer la relation 19 par

$$2\varepsilon = \left(\frac{\frac{\Delta\omega}{\omega}}{\frac{d_m}{\sqrt{2}}} \right)^4,$$

d'où

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = d_m \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{2}},$$

et comme les variations de fréquence peuvent avoir lieu pour les deux sens OQ' et OQ'', la largeur relative de la gamme de fréquence dans laquelle la variation relative de l'intensité sera inférieure à ε se déduira de

$$\frac{\Delta f}{f} = 2 d_m \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Les valeurs de $\frac{\Delta f}{f}$ sont données en fonction de la moyenne $\delta_m = \pi d_m$ des décréments dans le tableau suivant, pour $\varepsilon = 0{,}1$; on y donne également les valeurs de $\frac{\Delta f}{f}$, calculées par la formule 19, qui correspondent à une chute de l'intensité, égale à la moitié de sa valeur maximum. On remarquera que pour les valeurs de p un peu fortes, δ_m est sensiblement la moitié du décrément le plus fort.

$d_m =$		1/3	1/5	1/10	1/20
$\frac{\Delta f}{f}$ pour $\frac{\Delta I_2}{I_2} =$	0,1	0,10	0,06	0,03	0,015
	0,5	0,20	0,12	0,06	0,030

En se basant sur les considérations précédentes, on pourra employer les dispositions suivantes qui offrent des avantages appréciables sur l'excitation directe :

Si le circuit d'utilisation est peu amorti, l'excitation directe donnera lieu à une intensité variant très rapidement avec la fréquence; en le couplant à un circuit primaire très amorti, on pourra obtenir une intensité restant à peu près constante dans une gamme de fréquence étendue, et tombant assez rapidement en dehors de cette gamme.

Si le circuit d'utilisation est très amorti, en le couplant à un secondaire très peu amorti on y obtiendra une intensité variant très peu dans une gamme donnée, notablement moins qu'avec l'excitation directe, et, à partir d'une certaine limite, la chute de courant sera au contraire beaucoup plus rapide.

Dans les deux cas, ces résultats pourront s'obtenir avec un bon rendement.

On remarquera que l'on peut étendre la gamme de fréquence dans laquelle les variations de l'intensité secondaire restent inférieures à une limite donnée, si l'on admet que ces variations peuvent être positives ou négatives; on prendrait pour cela un couplage un peu plus fort que celui donné par la formule 18. En partant du point 0, le courant commencerait par augmenter, passerait par un maximum, puis décroîtrait, de la même manière que quand, les décréments étant égaux, on prend un couplage supérieur au couplage critique.

Le réseau de paraboles de la figure 10 permet de résoudre rapidement un problème de ce genre.

René Messy.